6 Frenetovi obrasci (Frenet-Serretove formule)

Triedar $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ se naziva prirodni triedar krive $\vec{r}=\vec{r}(t)$, odnosno krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$. On se mijenja od tačke do tačke krive. Tu promjenu opisuju Freneovi (Frenet) obrasci:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}_0}{\mathrm{d}s}=\frac{\vec{n}_0}{R},\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{n}_0}{\mathrm{d}s}=-\frac{\vec{n}_0}{R}-\frac{\vec{b}_0}{T},\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{b}_0}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{T}\vec{n}_0$$

ili što je ekvivalentno sa

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}_0}{\mathrm{d}s}=K\vec{n}_0,\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{n}_0}{\mathrm{d}s}=-K\vec{t}_0+\tau\vec{b}_0,\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{b}_0}{\mathrm{d}s}=-\tau\vec{n}_0$$

gdje je K krivina krive, a $\frac{1}{T}$ torzija krive, koja se računa po formuli

$$\frac{1}{T}=-\frac{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})}{|\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}|^2}.$$

Za torziju se često upotrebljava i oznaka $-\tau=\frac{1}{T}$.

76. Neka je $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $\vec{r}=\vec{r}(s)$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zadovoljavaju Frenetove jednačine. Izračunati izraz $\vec{n}\times\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s}$ (tačnije pojednostaviti izraz, tj riješiti se vektorskog proizvoda).

77. Napisati Freneove obrasce za krivu $\vec{r}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}$.

78. Vektor položaja pokretne tačke dat je kao funkcija luka $s:\vec{r}=s\vec{a}+\vec{a}\times\vec{A}(s)$, gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor $|\vec{a}|<1$, a $\vec{A}(s)$ diferencijabilna vektorska funkcija. Dokazati da je odnos krivine i torzije konstantan.

79. Na binormali krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ konstantne torzije nalazi se odsječak date dužine ℓ čiji je jedan kraj na krivoj. Drugi kraj odsječka opisuje krivu $\vec{R}=\vec{R}(s)$ kad se s mijenja.

(a) Razložiti vektor binormale krive $\vec{R}=\vec{R}(s)$ po pravcima ortova prirodnog triedra date krive.

(b) Odrediti ugao između binormala krivih koje odgovaraju određenom s.

80. Data je kriva $\vec{r}=\vec{r}(s)$. Razložite vektor $\frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{\mathrm{d}s^3}$ po pravcima ortova prirodnog triedra.

81. Neka je $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka ($\vec{r}=\vec{r}(s)$), gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta\overset{def}{=}\tau\vec{t}+K\vec{b}$, gdje su K i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds}-\delta\times\vec{t},\qquad \frac{d\vec{n}}{ds}-\delta\times\vec{n}\qquad\text{i}\qquad \frac{d\vec{b}}{ds}-\delta\times\vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata?

82. Naći vektor $\vec{A}(s)$ koji zadovoljava uslove

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}=\vec{A}\times\vec{t},\quad \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s}=\vec{A}\times\vec{n}$$

gdje je s luk krivine $\vec{r}=\vec{r}(s)$ a $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ redom ortovi tangente, normale i binormale te krive.

Elementarna pitanja iz prve oblasti: Krive u prostoru.

1. Data je kriva L u implicitnom obliku

$$L : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

Kako odrediti projekciju te krive na $x0y$ ravan? Kako odrediti projekciju na $x0z$ ravan? Kako odrediti projekciju na $y0z$ ravan? Zašto bi uopšte tražili projekciju te krive na naku ravan?

2. Kriva L je data parametarski u skalarnom obliku

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I; \\ z = z(t) \end{cases}$$

Šta ćemo dobiti kada izraz $x(t)$ izjednačimo sa nulom? Kakvu tačku $M(t)$ ćemo dobiti kada za neku vrijednost t imamo da vrijedi $z(t) = 0$?

3. Data je prava

$$p : \frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{m}$$

Kako pronaći presjek ove prave sa xOy ravni? Kako pronaći presjek sa xOz ravni? Kako pronaći presjek sa yOz ravni?

4. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je prava $y = kx + n$? Kako napisati ovu pravu u parametarskom obliku?

5. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je prava $x = a$? Kako napisati ovu pravu u parametarskom obliku?

6. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je prava $y = b$? Kako napisati ovu pravu u parametarskom obliku?

7. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je krug neka funkcija $y = f(x)$? Kako napisati ovu funkciju u parametarskom obliku?

8. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je krug $x^2 + y^2 = R^2$? Kako napisati ovaj krug u parametarskom obliku?

9. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$? Kako napisati ovu elipsu u parametarskom obliku?

10. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je hiperbola $x^2 - y^2 = 1$? Kako napisati ovu hiperbolu u parametarskom obliku?

11. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$? Kako napisati ovu hiperbolu u parametarskom obliku?